Pemodelan Rangkaian Pegas dengan Gaya Redam

Istiqoma Putri Salsabil (16610054), Sely Ayu Rahmasari (16610062), Arina Fitri Rozanni (16610076), Fatimatuzzahro (16610100)

Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Maulana Malik Ibrahim Malang

Abstract

Pegas dapat di artikan sebagai benda elastis yang digunakan untuk menyimpan energi mekanis. Pegas dapat dirangkai secara seri dan parallel. Pada penelitian ini, peneliti menggunakan Hukum Newton II untuk pemodelan rangkaian pegas, sehingga didapatkan persamaan differensial dari model pegas yang telah diilustrasikan. Kemudian persamaan tersebut dicari solusi analitiknya dan simulasinya dengan menggunakan software Maple

Kata Kunci : Gaya, Gravitasi, Newton, Pegas

1 Pendahuluan

Pegas merupakan komponen yang digunakan dalam industri otomotif, transportasi, dan industri lainnya. Pegas juga digunakan untuk sistem suspensi, peralatan, perabotan, dan lainnya. Pegas yang juga dapat di artikan sebagai benda elastis yang digunakan untuk menyimpan energi mekanis, pegas sendiri pun mememiliki banyak rancangannya. Rangkaian pegas dapat disusun dari beberapa buah pegas yang dipasang secara seri ataupun paralel sesuai dengan kebutuhan. Pegas-pegas yang dipasang secara seri akan menurunkan nilai konstanta pegas, sedangkan pemasangan pegas secara paralel akan menaikan nilai konstanta pegas.

Artikel ini memodelkan rangkaian pegas dengan menggunakan hukum Newton II sebagai prinsip dasar. Hukum Newton II mendeskripsikan bagaimana suatu partikel bereaksi pada gaya. Hukum Newton II dideskripsikan dengan persamaan berikut:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \tag{1}$$

dimana $\vec{F}$ adalah jumlah vektor dari total gaya yang di berikan pada massa (m). Gaya $\vec{F}$ sama dengan laju perubahan momentum (mv) dimana v adalah kecepatan massa dan x adalah posisi massa tersebut.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} \tag{2}$$

Jika diasumsikan massa adalah suatu konstanta maka :

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \tag{3}$$

dimana $\vec{a}$ adalah vektor percepatan massa

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} \tag{4}$$

sehingga persamaan (2) dapat dibentuk menjadi

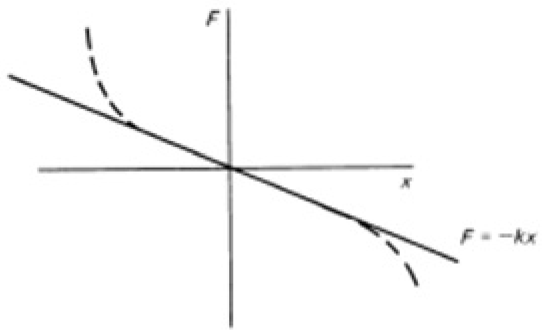
$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} \tag{5}$$

Jika tidak ada gaya $\vec{F}$, massa hanya bisa bergerak dengan kecepatan konstan. Dengan demikian variabilitas yang diamati dari kecepatan harus disebabkan oleh kekuatan yang mungkin diberikan oleh pegas. Pada beberapa posisi massa dapat ditempatkan dan tidak akan bergerak; disana pegas tidak memberikan kekuatan pada massa. Tempat dimana kita memusatkan sumbu koordinat kita. Jika $x = 0$ maka posisi tersebut disebut sebagai posisi keseimbangan atau pegas yang tidak terentang. Jarak x ini kemudian disebut sebagai perpindahan dari kesetimbangan atau jumlah peregangan pegas. Jika kita merentangkan pegas (yaitu $x < 0$), maka pegas memberikan gaya yang menarik massa kembali ke posisi kesetimbangan (yaitu $\vec{F} > 0$). Gaya seperti itu disebut gaya pemulihan. Lebih jauh lagi, kita akan mengamati bahwa ketika kita meningkatkan peregangan pegas, gaya yang diberikan oleh pegas akan meningkat. Dengan demikian kita dapat memperoleh hasil yang ditunjukkan pada Gambar 1, di mana kurva digambar dengan mulus menghubungkan titik data eksperimental yang ditandai dengan "x":

Gambar 1 : Eksperimen Gaya Pegas

Diasumsikan bahwa gaya hanya bergantung pada jumlah peregangan pegas; gaya tidak tergantung pada jumlah lain. Jadi, misalnya, gaya diasumsikan sama tidak peduli berapapun kecepatan massa bergerak.

Pemeriksaan yang cermat terhadap data eksperimen menunjukkan bahwa gaya bergantung, secara kompleks, pada peregangan. Namun, untuk peregangan pegas yang tidak terlalu besar (sesuai dengan paling banyak gaya moderat), gambar 2 menunjukkan bahwa kurva ini dapat diperkirakan dengan garis lurus:



Gambar 2 : Hukum Hooke

Demikian

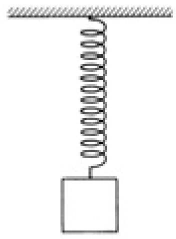
$$\vec{F} = -kx \tag{6}$$

adalah perkiraan yang baik untuk gaya pegas asalkan massa tidak terlalu jauh dari posisi setimbangnya. k disebut konstanta pegas. Itu tergantung pada elastisitas pegas. Hubungan linear antara gaya dan posisi massa ini ditemukan oleh ahli fisika Hooke abad ketujuh belas dan dengan demikian dikenal sebagai hukum Hooke. Menggandakan perpindahan, menggandakan gaya.

Menggunakan hukum Hooke, hukum kedua Newton tentang gerak menghasilkan model matematika paling sederhana dari sistem massa pegas.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{7}$$

Pada persamaan (7) menjelaskan gerakan sistem massa pegas. Dibawah ini, menunjukkan vertikal osilasi pada sistem massa pegas.



Gambar 3 : Vertikal osilasi pada pegas

Derivatif dari persamaan horizontal sistem massa pegas tidak di aplikasikan pada pada persamaan vertikal. Gaya gravitasi konstan $-mg$ dimana massa (m) dikali percepatan gravitasi (g). Dengan menambahkan vektor-vektornya hukum Newton II menjadi

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - mg \tag{8}$$

dimana y adalah koordinat vertikal dan y_0 adalah posisi pegas tanpa gaya.

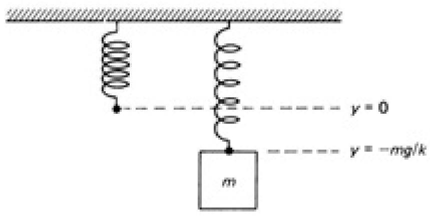
Kesetimbangan posisi yaitu dimana kita bisa menempatkan massa dan massa itu tidak akan bergerak. Kita menggunkan persamaan $\frac{dy}{dt} = \frac{d^2y}{dy^2} = 0$ dan kedua ruas persamaan tersebut harus seimbang :

$$0 = -ky - mg \tag{9}$$

dengan demikian kita melihat

$$y = -\frac{m}{k}g \tag{10}$$

ini adalah posisi kesetimbangan gravitasi sistem massa pegas.



Gambar 4 : Efek Gravitasional pada keadaan equilibrium

Hanya pada posisi tersebut gaya akan bekerja akibat gravitasi keseimbangan gaya ke atas dari pegas. Pegas yang merenggang kebawah dengan jarak mg/k ketika massa ditambahkan, maka hasilnya tidaklah mengejutkan. Untuk massa yang lebih besar maka pegas akan merenggang lebih besar pula. Semakin kaku suatu pegas (k lebih besar) maka kerenggangan yang diakibatkan oleh pegas tersebut semakin kecil. Hal ini sering menguntungkan untuk mendeskripsikan sistem kordinat dari satu dengan asal di $y = 0$ (posisi teregang pegas) satu dengan yang asal pada $y = -mg/k$ (posisi kesetimbangan dengan massa). Misalkan Z sama dengan perpindahan dari posisi kestimbangan,

$$Z = y - (-\frac{mg}{k}) = y + \frac{mg}{k} \tag{11}$$

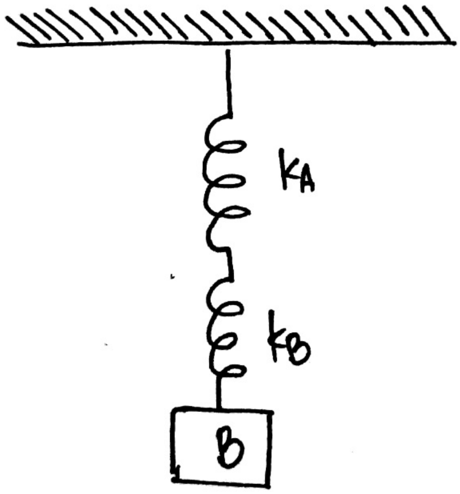
pada substitusi ini, hukum Newton II diatas menjadi

$$m\frac{d^2Z}{dt^2} = -kZ \tag{12}$$

dengan demikan massa akan bergerak vertikal disekitar posisi vertikal equilibrium baru dengan aturan yang sama seperti massa yang akan bergerak secara horizontal di sekitar posisi equilibrium horizontal sekitarnya.

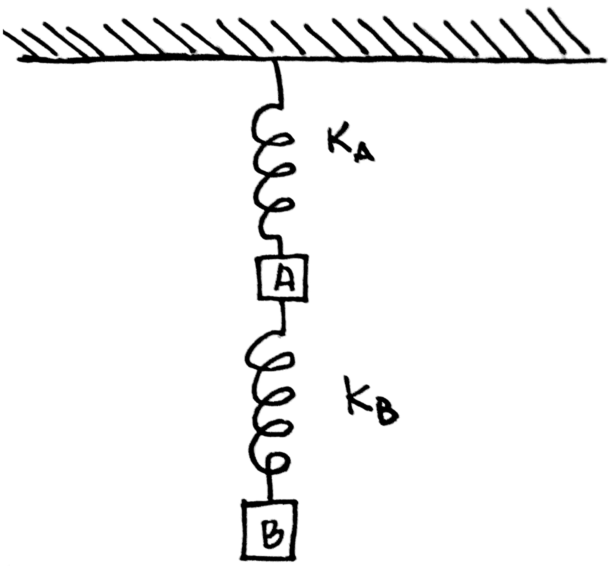
2 Metode Penelitian

Pada penelitian ini, peneliti memodelkan rangkaian pegas yang terdiri dari dua pegas yang digantung secara vertikal dan disusun secara seri, dengan tiap pegasnya berturut - turut memiliki konstanta k_A dan k_B, dan tiap pegas dihubungkan dengan beban A dan B. Mula - mula peneliti akan memodelkan pegas dengan rangkaian seri dan dikaitkan beban B seperti pada Gambar 5 pada posisi equilibrium.



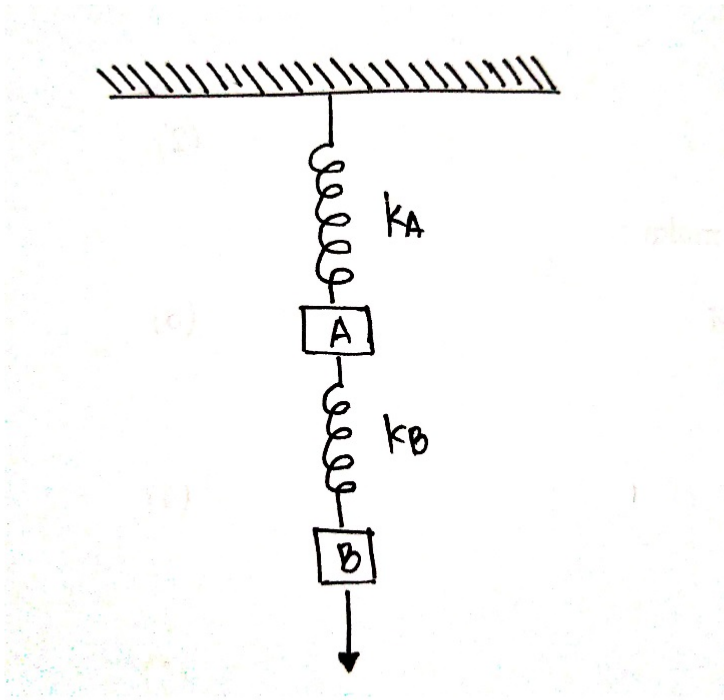
Gambar 5 : Ilustrasi rangkaian pegas yang akan dimodelkan

Kemudian peneliti akan memodelkan rangkaian pegas pada Gambar 5 pada posisi equilibrium dengan tambahan dikaitkan beban A pada pegas A seperti pada Gambar 6.



Gambar 6 : Ilustrasi rangkaian pegas yang akan dimodelkan

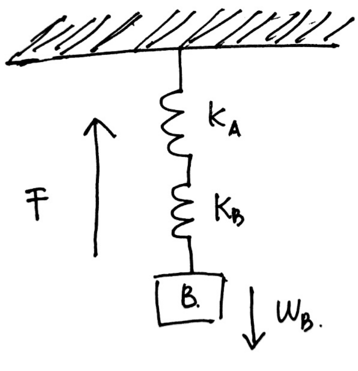
Model pegas terakhir yang akan dimodelkan peneliti adalah model pegas Gambar 6 dengan diberi gaya ke bawah seperti pada Gambar 7 berikut.



Gambar 7 : Ilustrasi rangkaian pegas yang akan dimodelkan

3 Hasil

Pada Gambar 8, gaya yang bekerja pada rangkaian pegas tersebut saat posisi equilibrium adalah gaya pegas A dan B yang bergerak keatas yang dinotasikan sebagai F, serta gaya berat oleh beban B yang bergerak ke bawah.



Gambar 8 : Ilustrasi rangkaian pegas yang akan dimodelkan

Pada Gambar 8 gaya yang bekerja pada model pegas tersebut salah satunya adalah gaya pegas F yang dapat diilustrasikan persamaannya sebagai berikut :

$$\begin{aligned} F &= ky \\ F &= (k_A + k_B)y_{B_0} \end{aligned} \tag{13}$$

Dengan k_A dan k_B berturut turut sebagai konstanta pegas A dan B, dan y_{B_0} sebagai jarak beban B pada keadaan equilibrium.

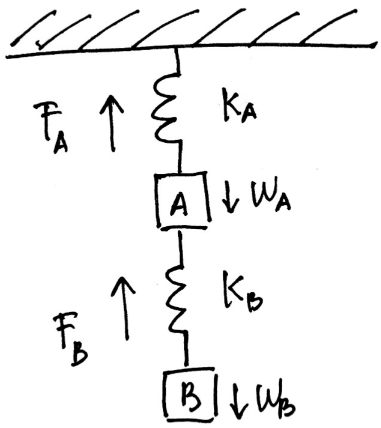
Pada beban B bekerja pula gaya berat sebagai berikut persamaannya:

$$\begin{aligned} W &= ma \\ W &= m_B \frac{d^2 y_{B_0}}{dt^2} \end{aligned} \tag{14}$$

Maka dari persamaan (13) dan (14) didapatkan:

$$\begin{aligned} F &= W \\ (k_A + k_B)y_{B_0} &= m\frac{d^2 y_{B_0}}{dt^2} \\ k_A y_{B_0} + k_B y_{B_0} &= m\frac{d^2 y_{B_0}}{dt^2} \\ k_A y_{B_0} + k_B y_{B_0} - m\frac{d^2 y_{B_0}}{dt^2} &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

Gambar 9, merupakan pegas pada Gambar 8 yang digantungkan beban A yang menghubungkan antara pegas A dan pegas B pada saat equilibrium.

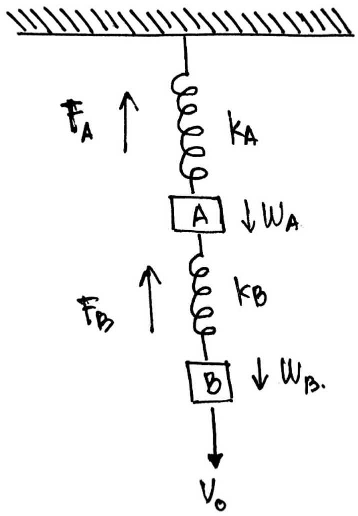


Gambar 9 : Ilustrasi rangkaian pegas yang akan dimodelkan

Pada kondisi equilibrium didapatkan persamaan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
F_A + F_B &= W_A + W_B \\
k_A y_{A_0} + k_B y_{B_1} &= m_A a + m_B a \\
k_A y_{A_0} + k_B y_{B_1} &= m_A \frac{d^2 y_{A_0}}{dt^2} + m_B \frac{d^2 y_{B_1}}{dt^2} \\
k_A y_{A_0} + k_B y_{B_1} - (m_A \frac{d^2 y_{A_0}}{dt^2} + m_B \frac{d^2 y_{B_1}}{dt^2}) &= 0 \\
k_A y_{A_0} - m_A \frac{d^2 y_{A_0}}{dt^2} + k_B y_{B_1} - m_B \frac{d^2 y_{B_1}}{dt^2} &= 0
\end{aligned} \tag{16}
$$

Gambar 10 adalah model pegas pada Gambar 9 yang diberi gaya ke bawah dengan kecepatan v_0.



Gambar 10 : Ilustrasi rangkaian pegas yang akan dimodelkan

Pada Gambar 10, bekerja gaya pegas F_A dan F_B yang bergerak ke atas. Persamaan pada beban A saat pegas belum diberi gaya:

$$
\begin{aligned}
F_A = k y_{A_0} &= m_A a \\
y_{A_0} &= \frac{m_A a}{k}
\end{aligned} \tag{17}
$$

Persamaan pada beban A saat pegas sudah diberi gaya:

$$\begin{aligned}
F_A = ky_{A_1} &= m_A a \\
y_{A_1} &= \frac{m_A a}{k} \\
(y_{A_0} - y_A) &= \frac{m_A a}{k} \\
-y_A &= \frac{m_A a}{k} - y_{A_0} \\
Z_A \equiv y_A &= -\frac{m_A a}{k} + y_{A_0}
\end{aligned} \tag{18}$$

Persamaan pada beban B saat pegas belum diberi gaya dengan diasumsikan bahwa $y_{B_0} = 0$

$$\begin{aligned}
F_B = ky_{B_1} &= m_B a \\
y_{B_1} &= \frac{m_B a}{k} \\
0 &= \frac{m_B a}{k}
\end{aligned} \tag{19}$$

Persamaan pada beban B saat pegas sudah diberi gaya :

$$\begin{aligned}
F_B = -ky_{B_2} &= m_B a \\
-y_{B_2} &= \frac{m_B a}{k} \\
-(y_{B_1} - (-y_B)) &= \frac{m_B a}{k} \\
-y_{B_1} - y_B &= \frac{m_B a}{k} \\
-y_B &= \frac{m_B a}{k} + y_{B_1} \\
Z_B \equiv y_B &= -\frac{m_B a}{k} + y_{B_0}
\end{aligned} \tag{20}$$

Kemudian asumsikan $k_A = k_B = k$ maka pada pemodelan pada Gambar 10 dapat diilustrasikan persamaannya sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
F_A - W_A + F_B - W_B &= 0 \\
kZ_A - m_A a + kZ_B - m_B a &= 0 \\
k(Z_A + Z_B) - a(m_A + m_B) &= 0 \\
k(Z_A + Z_B) - \frac{d^2(Z_A + Z_B)}{dt^2}(m_A + m_B) &= 0
\end{aligned} \tag{21}$$

dengan $\mathcal{Z} = Z_A + Z_B$ maka

$$k\mathcal{Z} - \frac{d^2\mathcal{Z}}{dt^2}(m_A + m_B) = 0 \tag{22}$$

4 Pembahasan

Dengan menggunakan hukum hooke dan gaya gravitasi, dapat diperoleh persamaan model pegas yang dicari adalah sebagai berikut :

$$k\mathcal{Z} - \frac{d^2\mathcal{Z}}{dt^2}(m_A + m_B) = 0. \tag{23}$$

Kemudian peneliti mencari solusi umum dari persamaan tersebut dengan menggunakan software Maple ditemukan solusi sebagai berikut :

$$Z(t) = \int_0^t \int_0^{z1} \frac{kZ(\_z1)}{mA + mB} d\_z1 d\_z1 + 10 \tag{24}$$

Namun peneliti mengalami kendala dalam membuat plot simulasi dari grafik sehingga penelitian masih terhambat pada plot solusi analitiknya.

5 Saran

Dalam penelitian berikutnya diharapkan peneliti berikut mencari solusi analitik dengan metode lainnya atau menggunakan software lain

6 Kesimpulan

Dari penelitian pemodelan rangkaian pegas dengan gaya redam, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Persamaan model pegas yang dirancang peneliti diperoleh dari mengaplikasikan hukum hooke dan gaya berat sehingga diperoleh persamaannya sebagai berikut :

$$k\mathcal{Z} - \frac{d^2\mathcal{Z}}{dt^2}(m_A + m_B) = 0.$$

2. Dengan menggunakan Maple diperoleh solusi analitik sebagai berikut :

$$Z(t) = \int_0^t \int_0^{z1} \frac{kZ(\_z1)}{mA + mB} d\_z1 d\_z1 + 10$$

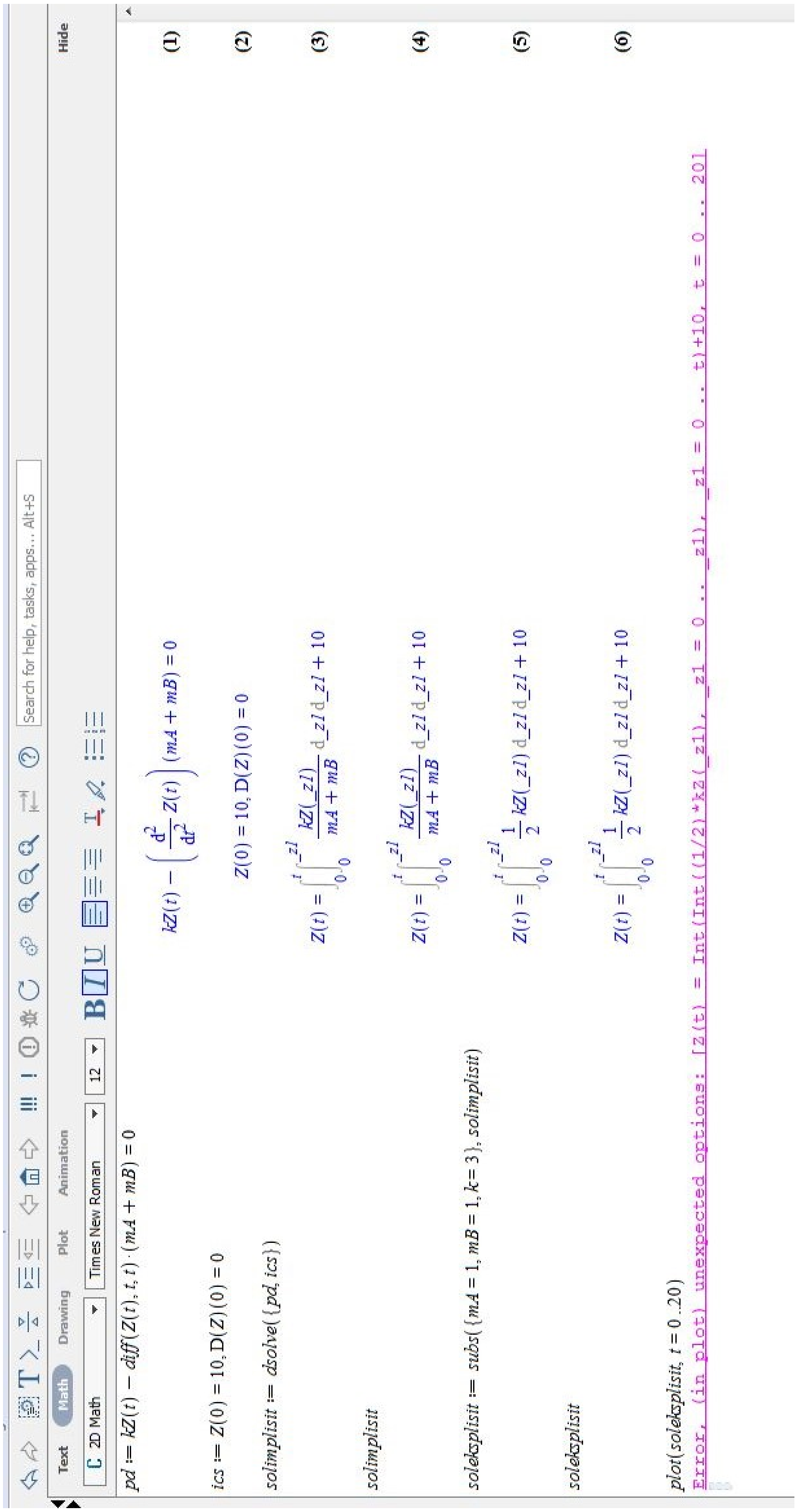
References

[1] Haberman, Richard. Mathematical Models Mechanical Vibrations, Population Dynamics, and Traffic Flow. United State of America: Englewood Cliffs.

[2] Irawan, Didi. 2018. Pengaruh Nilai Konstanta Terhadap Pertambahan Panjang Pegas Pada Rangkaian Tunggal, Seri dan Paralel. JURNAL MER-C. 1(5): 1.

[3] Vitaloka, Dwi. 2013. Simulasi Sistem Pegas Massa. Kadikma. 1(4):1.

Lampiran


pd := kZ(t) − diff(Z(t), t, t) · (mA + mB) = 0
kZ(t) − (d²/dt² Z(t)) (mA + mB) = 0 (1)
ics := Z(0) = 10, D(Z)(0) = 0
Z(0) = 10, D(Z)(0) = 0 (2)
solimplisit := dsolve({pd, ics})
Z(t) = ∫_0^t ∫_0^_z1 kZ(_z1)/(mA + mB) d_z1 d_z1 + 10 (3)
solimplisit
Z(t) = ∫_0^t ∫_0^_z1 kZ(_z1)/(mA + mB) d_z1 d_z1 + 10 (4)
soleksplisit := subs({mA = 1, mB = 1, k = 3}, solimplisit)
Z(t) = ∫_0^t ∫_0^_z1 1/2 kZ(_z1) d_z1 d_z1 + 10 (5)
soleksplisit
Z(t) = ∫_0^t ∫_0^_z1 1/2 kZ(_z1) d_z1 d_z1 + 10 (6)
plot(soleksplisit, t = 0 ..20)
Error, (in plot) unexpected options: [Z(t) = Int(Int((1/2)*kZ(_z1), _z1 = 0 .. _z1), _z1 = 0 .. t)+10, t = 0 .. 20]